ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТИСТИКЕ СОСТОЯНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗВЕЗД В ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМАХ

Астрофизика часто имеет дело с совокупностями нестационарных звезд, входящих в состав тех или иных звездных систем. Классические примеры таких совокупностей составляют, например, звезды типа RR Лиры в шарообразных звездных скоплениях и в эллиптических галактиках. Представляют выдающийся интерес совокупности звезд типа RW Возничего в звездных ассоциациях. Мы сознательно употребляем термин «звезды типа RW Возничего» вместо термина «звезды типа Т Тельца», так как хотим сконцентрировать здесь внимание на фотометрических свойствах этих звезд.

Уже много лет изучаются *вспыхивающие* звезды-карлики, входящие в звездные ассоциации и в молодые открытые скопления. Недалеко то время, когда число систем, каждая из которых содержит по крайней мере несколько сот известных, вспыхивающих звезд, будет исчисляться многими десятками. Поскольку каждая из вспыхивающих звезд представляет собой некоторый случайный процесс, то определение ее характеристик представляет собой довольно трудоемкую задачу и требует длительных, продолжающихся иногда годы наблюдений. Тем более трудно определить из наблюдений требуемые статистические характеристики даже для небольшой выборки вспыхивающих звезд из данной совокупности.

Между тем существование указанных совокупностей нестационарных звезд ставит вопрос о статистике параметров таких звезд в каждой данной совокупности. Таким образом, в этом случае речь идет о составлении *статистики статистических параметров* или, короче, о статистике статистик. Такие «сверхстатистики» могут в дальнейшем сравниваться друг с другом и тем самым служить материалом для заключений об эволюционном статусе различных совокупностей.

Для достижения таких целей прямым путем, т. е. на основе определения статистических или других параметров всех отдельных членов совокупности, как вытекает из вышесказанного, следовало бы выполнить неимоверную по объему работу.

Поэтому здесь, в Бюракане, мы неоднократно делали попытки получить хотя бы частично такую сверхстатистическую информацию о совокупностях переменных звезд в тех или иных системах, без подробного определения значений интересующих нас параметров для каждой звезды совокупности. В частности, были сделаны первые попытки определения распределения средних частот вспышек вспыхивающих звезд в Плеядах [1] и в ассоциации Ориона [2] без предварительного определения средней частоты вспышек для отдельных вспыхивающих звезд.

Для внесения ясности в вопрос о возможности такого подхода к совокупностям переменных звезд других типов, например, показы-

---

В кн.: Вспыхивающие звезды и родственные объекты. Труды симпозиума, Бюракан, 16—19 октября 1984. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 141, 1985.

вающих периодические колебания блеска, мы рассмотрели один искусственный, но зато простой и, так сказать, прозрачный пример.

Представим себе совокупность звезд, блеск (звездная величина) которых меняется по следующему периодическому закону: прямолинейный подъем от минимума до максимума (обозначим разность блеска в минимуме и максимуме через a и затем мгновенное падение до минимума. Пусть периоды этих изменений для различных звезд различны, но ограничены каким-то верхним пределом (скажем, 10 дней). Пусть, наконец, эти функции имеют различные амплитуды.

Ставится задача определения функции распределения $f(a)$ амплитуд блеска без определения амплитуды для отдельных звезд. Как увидим, эта задача в принципе разрешима и без определения амплитуды a, хотя бы даже для одной звезды.

Для этого произведем измерения блеска всех членов нашей совокупности в два различных момента времени, t_1 и t_2, отделенных друг от друга промежутком, превосходящим один год. В таком случае, вследствие наличия хотя бы небольшой дисперсии периодов, разности фаз (для двух моментов) будут распределены равномерно между нулем и 2π.

Тогда оказывается, что для разностей звездных величин d для двух моментов мы будем иметь распределение $\varphi(d)$, связанное с $f(a)$ следующей формулой:

$$\varphi(d)=\int\limits_{d}^{\infty}\left(1-\left(\frac{d}{a}\right)\right)\frac{f(a)da}{a}, \qquad (1)$$

которая может рассматриваться как интегральное уравнение для искомой функции $f(a)$.

Как это часто бывает, наша *обратная задача* привела к интегральному уравнению. В данном случае это уравнение имеет простое решение:

$$f(a)=a^2\varphi''(a). \qquad (2)$$

В этом случае решение получается в результате двойного дифференцирования некоторой функции, полученной из наблюдений, и поэтому будет определяться с меньшей относительной точностью, чем наблюденное распределение разностей d. Как Вы знаете, такое явление характерно для обратных задач.

Таким образом, мы показали, что в рассматриваемом гипотетическом примере в принципе достаточно было бы получить два фотометрических снимка нашей совокупности, разделенных длительным промежутком времени, чтобы получить такую важную характеристику рассматриваемой совокупности, как распределение амплитуд.

Очевидно, что от этого воображаемого примера можно перейти к более реалистическим моделям. Так, более реалистической была бы совокупность кривых, зависящих от двух параметров. Конечно, для этого пришлось бы получить большее количество наблюдений, скажем, фотоснимков и притом распределенных во времени специально выбранным образом. В дальнейшем мы предполагаем рассмотреть и эти, более сложные случаи.

В рассмотренном примере кривая блеска каждой звезды является *детерминированной*, и поэтому задача не так сложна. В работе [1] мы рассмотрели совокупность вспыхивающих звезд, когда предполагается (а это разумное предположение), что последовательность вспышек каждой из звезд подчиняется закону Пуассона, но что при этом средние частоты ν для разных звезд различны. Ставилась задача о нахождении функции распределения частот при отсутствии данных о значении ν для каждой из вспыхивающих звезд. Практически это приходится делать в условиях, когда часть вспыхивающих звезд еще не открыта.

Оказалось, что исходной функцией для решения этой задачи может служить функция распределения во времени первых наблюдавшихся у каждой из звезд совокупности вспышек. А поскольку первая наблюдавшаяся вспышка звезды является моментом ее открытия, то мы говорим, что исходным наблюдательным материалом для решения вопроса является «хронология открытий» вспыхивающих звезд данной совокупности.

Можно показать также, что исходным материалом может служить хронология вторых вспышек, т. е. подтверждений открытий вспыхивающих звезд.

Таким образом, исходных данных оказывается как бы больше, чем нужно, т. е. задача оказывается переопределенной. На самом деле это только помогает делу.

В результате применения этого метода мы убедились в возможности его использования на практике. Мы не будем вступать здесь в обсуждение степени надежности полученных результатов. Некоторые предварительные выводы в этом направлении содержатся в недавно опубликованной работе Арутюняна [3]. Здесь же отметим лишь, что для больших частот функция распределения определяется гораздо лучше, чем для малых частот. Это физически вполне понятно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А. Астрофизика, 14, 367, 1978.
2. Парсамян Э. С. Астрофизика, 16, 677, 1980.
3. Арутюнян Г. А. Астрофизика, 21, 163, 1984.

ДИСКУССИЯ ПО ДОКЛАДУ В. А. АМБАРЦУМЯНА

А. М. Черепащук. Какие ограничения накладывались на решение обратной задачи? В данном случае кажется естественным наложить условие неотрицательности на искомую функцию распределения, что может облегчить ее поиск.

В. А. Амбарцумян. Да, при решении практической задачи это должно облегчить.

В. П. Гринин. Предполагается ли постоянство (одинаковость) функции распределения амплитуд для всех членов скопления?

В. А. Амбарцумян. В первом примере мы рассматривали детерминированные процессы. Предполагалось, что звезды имеют различные амплитуды периодических колебаний, но амплитуды колебаний у каждой звезды постоянны. Мы ищем функции распределения этих амплитуд и выводим их из двух фотометрических обмеров совокупности. Слово «распределение амплитуд» для каждого члена скопления не имеет смысла. Ведь переменные представляют собой детерминированный процесс, а не случайный. О случайных процессах говорится в конце сообщения.

А. В. Тутуков. Для звезд с большими временами стационарного блеска число звезд с различающимися яркостями на двух снимках может оказаться слишком малым для уверенного восстановления искомой функции. Можно ли обобщить Ваш метод на случай нескольких, определенным образом расположенных во времени снимков?

В. А. Амбарцумян. Рассмотрение двух снимков у меня предполагалось для случая детерминированных периодических переменных. Длительные остановки характерны для тех случаев, когда каждая звезда представляется кривой, изображающей случайный процесс. Но вообще, конечно, использование нескольких снимков может оказаться полезным для некоторых классов переменных звезд.

Р. М. Мурадян. Мне бы хотелось обратить внимание на возможное обобщение замечательной формулы В. А. Амбарцумяна $n_0 = \frac{n_1^2}{2n_2}$, справедливой для распределения Пуассона.

В случае распределения Планка

$$P_n = \frac{\pi^n}{(1+\pi)^{n+1}}$$

соответствующая формула имеет вид

$$r_0 = \frac{n_1^2}{r_2}.$$

Для обобщенного распределения Планка

$$P_k^n = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \cdot \frac{(\pi/k)^n}{(1+\pi/k)^{n+k}},$$

частными случаями которого являются распределения Пуассона и Планка, имеет место соотношение

$$r_0 = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{n_1^2}{n_2},$$

которое при $k=1$ переходит в формулу для распределения Планка, а при $k=\infty$—в формулу Амбарцумяна. Более точно значение параметра k, имеющего определенный физический смысл, может быть определено из наблюдательных данных.

М. А. Мнацаканян. В своем докладе Виктор Амазаспович подчеркнул некорректность обратных задач—она проявлялась в необходимости дифференцирования плотности наблюдаемой функции распределения. В рассмотренном им здесь примере требуется нахождение второй производной, в задаче о восстановлении пространственного распределения по его проекциям (задача томографии) требуется найти первую производную, а вот в задаче о нахождении функции частот звездных вспышек на деле мы должны уметь вычислять все производные (теоретически бесконечное количество) от наблюдаемых распределений, а практически, скажем, до двадцатого-тридцатого.

А. М. Черепащуком было замечено, что задача существенно упрощается в предположении о неотрицательности или монотонности искомой функции распределения. Такой подход используется в развитом академиком Тихоновым методе регуляризации. Однако следует заметить, что это вряд ли существенно облегчает решение задачи—коридор ошибок почти целиком переносится на случай монотонных функций (не говоря о том, что предположение о монотонности может быть и неверным).

Что мы можем здесь предложить? Главное в задаче уметь правильно и хорошо описывать исходную наблюдаемую функцию распределения. Для каждой обратной задачи, по-видимому, существует своя собственная функция, характеризующая исходное распределение—данной операции «проецирования»—оператора перевода оригинала в наблюдаемое представление. Например, в задаче томографии это—функции *арксинуса,* а в задаче о частотах звездных вспышек это—функции биномиального распределения.

Если эти собственные функции правильно уметь определять, исходя из характера и специфики обратной задачи, то наблюдаемое распределение представится в виде суперпозиции по ним с постоянными коэффициентами. Тогда операции дифференцирования не внесут серьезной ошибки, так как они производятся над «правильными» собственными функциями. Источником ошибок являются только неточности определения постоянных коэффициентов, которые (неточности) почти того же порядка, что и в исходном распределении. В результате определение оригинала может быть осуществлено с той же точностью, с которой мы сможем описать наблюдаемое распределение.

Нами были проведены численные эксперименты решения задач томографии и о частотах вспышек. Оказывается, что решать их можно при очень малых статистиках, например, для 10—20 звезд. Использование указанных собственных функций позволяет получить поразительные результаты, а именно можно восстановить оригинал по его изображению, который оказывается гораздо *ближе* к тому «теоретическому» распределению, которое заложено природой в искомое оригинальное распределение, чем то распределение, которое реализовано в случае исследуемого конкретного скопления или группы.